

Planche n° 6. Séries numériques

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1

Nature de la série de terme général

- 1) (*) $\ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \right)$ 2) (*) $\frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$ 3) (**) $\left(\frac{n+3}{2n+1} \right)^{\ln n}$
 4) (**) $\frac{1}{\ln(n) \ln(\operatorname{ch} n)}$ 5) (**) $\operatorname{Arccos} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}}$ 6) (*) $\frac{n^2}{(n-1)!}$
 7) $\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$ 8) (**) $\ln \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} \frac{n^2 + 1}{n} \right)$ 9) (*) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{n^2 + \cos^2 x} dx$
 10) (**) $n^{-\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})}$ 11) (**) $e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ 12) (**) $1 - n \ln \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)$

Exercice n° 2

Nature de la série de terme général .

- 1) (***) $\sqrt[4]{n^4 + 2n^2} - \sqrt[3]{P(n)}$ où P est un polynôme. 2) (**) $\frac{1}{n^\alpha} S(n)$ où $S(n) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n}$.
 3) (**) u_n où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} e^{-u_{n-1}}$.
 4) (****I) $u_n = \frac{1}{p_n}$ où p_n est le n-ème nombre premier
 (indication : considérer $\sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} \right) = \sum_{n=1}^N \ln \left(1 + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^2} + \dots \right)$).
 5) (***) $u_n = \frac{1}{n(c(n))^\alpha}$ où $c(n)$ est le nombre de chiffres de n en base 10.
 6) (*) $\frac{\left(\prod_{k=2}^n \ln k \right)^a}{(n!)^b}$ $a > 0$ et $b > 0$. 7) (**) $\operatorname{Arctan} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^a \right) - \operatorname{Arctan} \left(\left(1 - \frac{1}{n} \right)^a \right)$.
 8) (**) $\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n k^{3/2}$. 9) (***) $\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^\alpha} \right) \right) - 1$.

Exercice n° 3

Nature de la série de terme général .

- 1) (**) $\sin \left(\frac{\pi n^2}{n+1} \right)$ 2) (**) $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n-1}}$ 3) (**) $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$
 4) (**) $(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ 5) (**) $(-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$ où P et Q sont deux polynômes non nuls
 6) (****) $(\sin(n! \pi e))^p$ p entier naturel non nul.

Exercice n° 4

Calculer les sommes des séries suivantes après avoir vérifié leur convergence.

- 1) (**) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$ 2) (**) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n}$ 3) (****) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$ 4) (**) $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$
 5) (*) $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$ 6) (****) $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln \left(\cos \frac{a}{2^n} \right)$ $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ 7) (****) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{a}{2^n}}{2^n}$

Exercice n° 5 (*) I)**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. Trouver un exemple de suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n converge mais telle que la suite de terme général nu_n ne tende pas vers 0.

Exercice n° 6 (*)**

Soit σ une injection de \mathbb{N}^* dans lui-même. Montrer que la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice n° 7 ()**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que les séries de termes généraux u_n , $\frac{u_n}{1+u_n}$, $\ln(1+u_n)$ et $\int_0^{u_n} \frac{dx}{1+x^e}$ sont de mêmes natures.

Exercice n° 8 (*)**

Trouver un développement limité à l'ordre 4 quand n tend vers l'infini de $\left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right) \times (n+1)!$.

Exercice n° 9 (*)**

Nature de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\left(2 + \sqrt{3}\right)^n\right)$.

Exercice n° 10 ()**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive telle que la série de terme général u_n converge. Etudier la nature de la série de terme général $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

Exercice n° 11 (*)**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Trouver la nature de la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{(1+u_1)\dots(1+u_n)}$, $n \geq 1$, connaissant la nature de la série de terme général u_n puis en calculer la somme en cas de convergence.

Exercice n° 12 (**)**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n diverge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \dots + u_n$. Etudier en fonction de $\alpha > 0$ la nature de la série de terme général $\frac{u_n}{(S_n)^\alpha}$.

Exercice n° 13 ()**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{1 + (-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$, $n \geq 1$.

Exercice n° 14 (**)**

On sait que $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$.

A partir de la série précédente, on construit une nouvelle série en prenant p termes positifs, q termes négatifs, p termes positifs ... (Par exemple pour $p = 3$ et $q = 2$, on s'intéresse à $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$). Convergence et somme de cette série.

Exercice n° 15 (*)**

Nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^\alpha}$.

Exercice n° 16

Convergence et somme éventuelle de la série de terme général

$$1) \text{ (**)} u_n = \frac{2n^3 - 3n^2 + 1}{(n+3)!} \quad 2) \text{ (***)} u_n = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}, n \geq 1, a \in \mathbb{R}^{+*} \text{ donné.}$$

Exercice n° 17 (*)

Nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^p}$, $p \in]0, +\infty[$.

Exercice n° 18 ()**

Déterminer un équivalent simple de $\frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}$ quand n tend vers l'infini (a réel positif donné).

Exercice n° 19 (I)**

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice n° 20 (*) I)**

Développement limité à l'ordre 4 de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ quand n tend vers l'infini.

Exercice n° 21 ()**

Equivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{p=1}^n p^p$.

Exercice n° 22 (*)**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*, n \neq p} \frac{1}{n^2 - p^2} \right)$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{p \in \mathbb{N}^*, p \neq n} \frac{1}{n^2 - p^2} \right)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice n° 23 ()**

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice n° 24 (**)**

Soient $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle. Pour $n \geq 1$, on pose $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$. Montrer que si la série de terme général $(u_n)^2$ converge alors la série de terme général $(v_n)^2$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} (v_n)^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n)^2$ (indication : majorer $v_n^2 - 2u_n v_n$).

Exercice n° 25 (*)**

Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$, $n \geq 0$.